

CHAPITRE 6 : Lentilles minces

Les lentilles minces sont les composants élémentaires de la plupart des systèmes centrés.

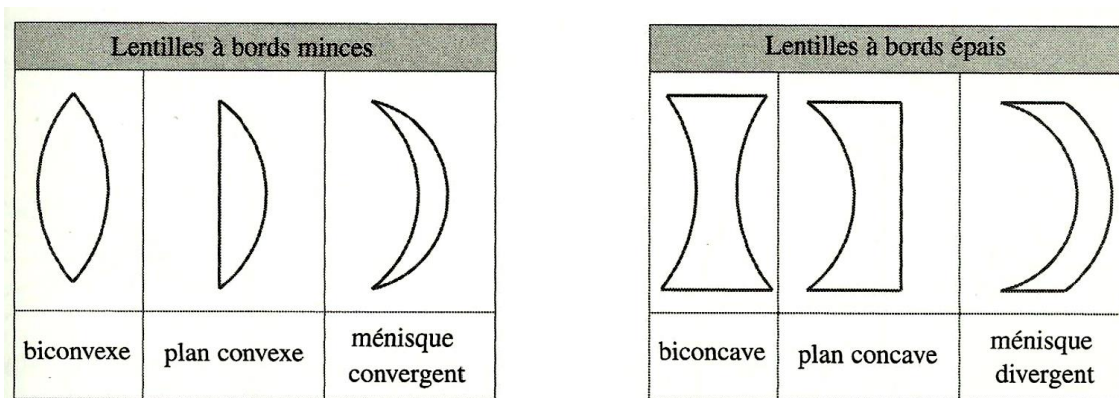
1. Présentation des lentilles

1.1. Les différentes sortes de lentilles

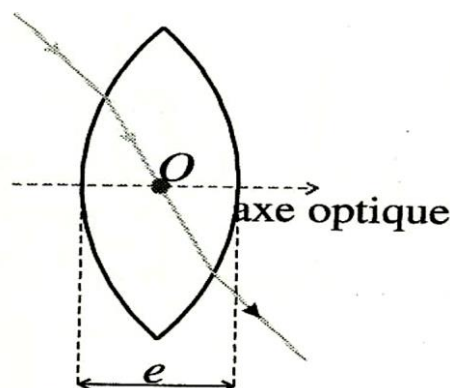
Une lentille est un composant optique constitué par un milieu transparent, homogène et isotrope, délimité par deux dioptries sphériques ou un dioptre sphérique et un dioptre plan.

Les lentilles sont des systèmes centrés. On distingue deux types de lentilles :

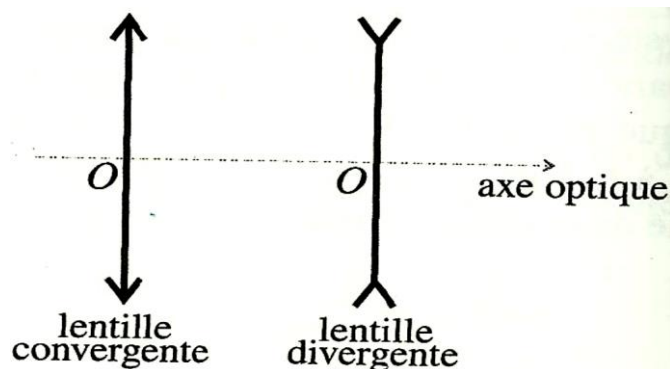
- les lentilles convergentes qui sont les lentilles à bords minces,
- les lentilles divergentes qui sont les lentilles à bords épais.



Dans les conditions normales d'utilisation de la lentille, il existe un point O situé sur l'axe optique, tel que pour tout rayon passant par O à l'intérieur de la lentille, le rayon sortant de la lentille est parallèle au rayon entrant. Ce point est appelé centre optique de la lentille.

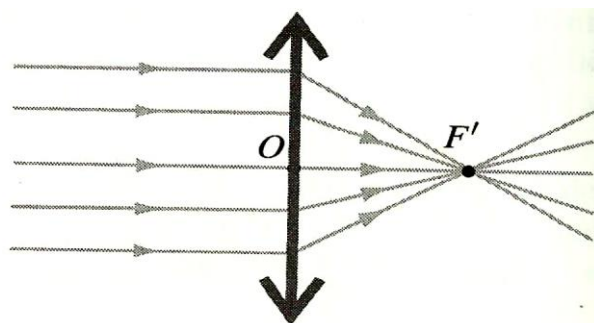


Une lentille mince est une lentille dont l'épaisseur e sur l'axe est petite comparée aux rayons de courbures de ses faces. Dans ce cas, on néglige complètement cette épaisseur et on présente les lentilles par un trait sur lequel on fait seulement figurer le centre optique O . Les symboles des lentilles convergente et divergente sont donnés sur la figure suivante :

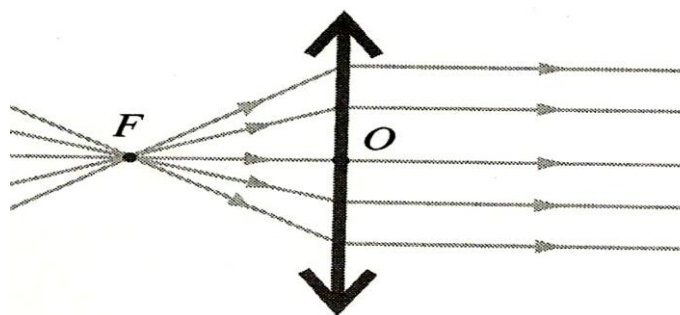


1.2. Lentilles convergentes

Si on éclaire une lentille convergente par un faisceau parallèle à l'axe optique, on observe que les rayons réfractés convergent en un point de l'espace image qui est le foyer principal F' .



De même si l'on place une source ponctuelle au point F symétrique de F' par rapport à O , on observe qu'après la lentille, le faisceau est parallèle à l'axe donc F est le foyer principal objet.



Pour une lentille convergente, les foyers principaux objet et image sont symétriques par rapport au centre optique. Le foyer objet est situé avant le centre optique et le foyer image après O dans le sens de propagation de la lumière.

On définit les distances focales :

- la distance focale objet $f = \overline{OF}$ qui est négative pour une lentille convergente,
- la distance focale image $f' = \overline{OF'}$ qui est positive pour une lentille convergente.

Les distances focales f et f' sont l'opposée l'une de l'autre : $f = -f'$.

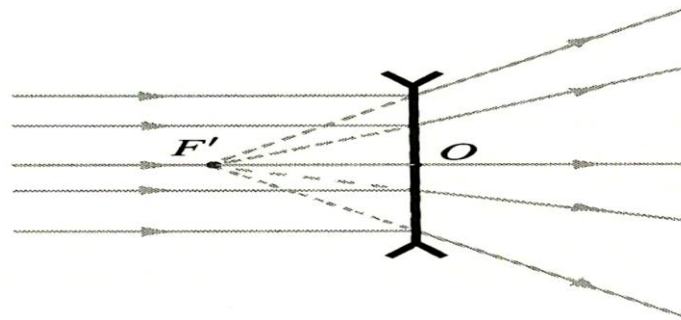
On définit la vergence V d'une lentille par :

$$V = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

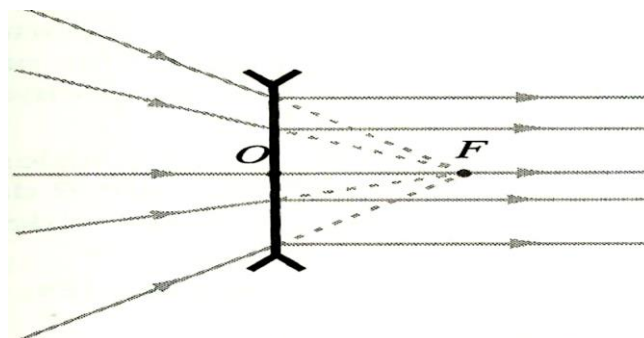
La vergence d'une lentille convergente est positive. Elle s'exprime en dioptrie (δ) qui correspond à des m^{-1} .

1.3. Lentilles divergentes

Si l'on éclaire une lentille divergente par un faisceau parallèle à l'axe optique, on observe que le faisceau diverge après passage à travers la lentille. Si on prolonge les rayons du faisceau divergent, ils semblent provenir d'un point de l'espace objet qui est donc l'image du faisceau parallèle. Ce point est le foyer principal image F' de la lentille. C'est un point image virtuel.



Si l'on éclaire la lentille par un faisceau convergent dont les prolongements de rayon se croisent au point symétrique de F' par rapport à la lentille, le faisceau émergent est parallèle à l'axe. Ce point est donc le foyer principal objet F . C'est un point objet virtuel.



Pour une lentille divergente les foyers principaux objet et image sont symétriques par rapport au centre optique. Ce sont des points virtuels : le foyer objet est situé après le centre optique et le foyer image avant O dans le sens de propagation de la lumière.

On définit les distances focales :

- la distance focale objet $f = \overline{OF}$ qui est négative pour une lentille divergente,

- la distance focale image $f' = \overline{OF'}$ qui est positive pour une lentille divergente.

Les distances focales f et f' sont l'opposée l'une de l'autre : $f = -f'$

La vergence d'une lentille divergente est négative.

2. Plans focaux objet et image des lentilles minces

2.1. Définition

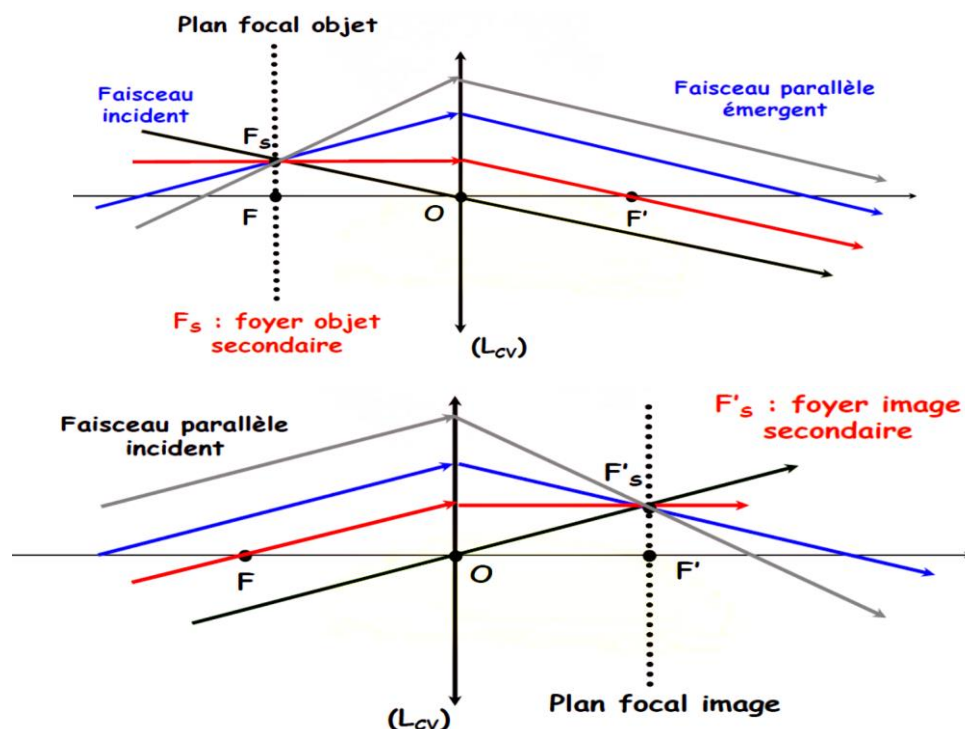
Les plans perpendiculaires à l'axe optique de la lentille et passant par les foyers sont appelés plans focaux. Une lentille a donc un plan focal objet et un plan focal image.

2.2. Propriétés

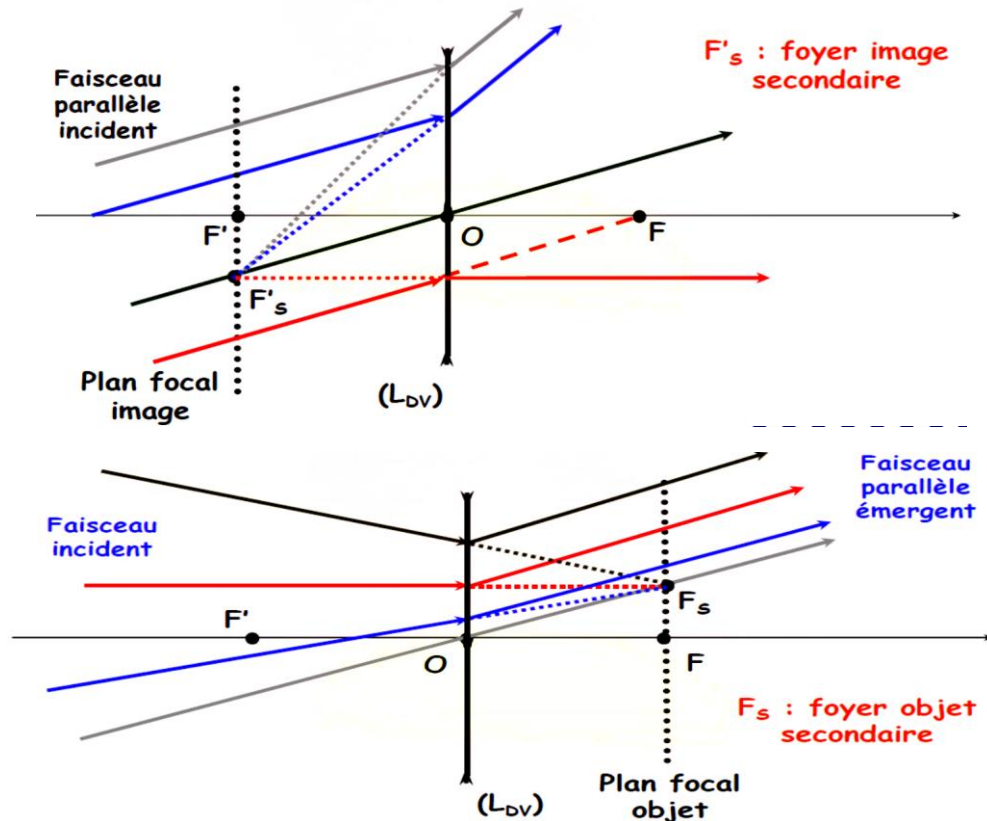
Un point situé dans un plan focal (objet ou image) est appelé foyer secondaire (objet ou image). Les propriétés sont les suivantes :

- un faisceau issu d'un foyer secondaire objet F_s émerge parallèlement à l'axe secondaire F_sO . Soit encore : tout point F_s du plan focal objet a son image rejetée à l'infini dans la direction F_sO .
- un faisceau parallèle, incliné par rapport à l'axe optique, émerge en passant par le foyer secondaire image F'_s , intersection du plan focal image et de l'axe secondaire F'_sO parallèle au faisceau incident. Soit encore : tout point F'_s du plan focal image est l'image d'un point situé à l'infini dans la direction F'_sO .

- Propriétés des plans focaux (objet et image, lentille convergente)**



- Propriétés des plans focaux (objet et image, lentille divergente)



3. Constructions géométriques

Pour trouver l'image d'un objet par une lentille on peut procéder graphiquement, en réalisant une construction géométrique. Il est important de maîtriser cette méthode qui suit.

3.1. Les règles de construction

On connaît le rayon émergent d'une lentille mince pour trois types de rayons incidents remarquables :

1. un rayon incident passant par le centre optique O n'est pas dévié ;
2. un rayon incident parallèle à l'axe donne un rayon émergent qui passe (réellement ou virtuellement) par le foyer image F' ;
3. un rayon incident passant (réellement ou virtuellement) par le foyer objet F donne un rayon émergent parallèle à l'axe optique.

De plus d'après la définition des foyers secondaires :

4. deux rayons incidents parallèles donnent des rayons émergents qui se croisent (réellement ou virtuellement) dans le plan focal image ;
5. deux rayons incidents qui se croisent (réellement ou virtuellement) dans le plan focal objet donnent des rayons émergents parallèles entre eux.

3.2. Méthode de construction

Les trois premières règles permettent de déterminer graphiquement l'image de n'importe quel point objet B hors de l'axe optique. Il suffit de tracer les trois rayons remarquables passant par (réellement ou virtuellement) par B . Les trois rayons émergents passent tous (réellement ou virtuellement) par l'image (réelle ou virtuelle) B' de B .

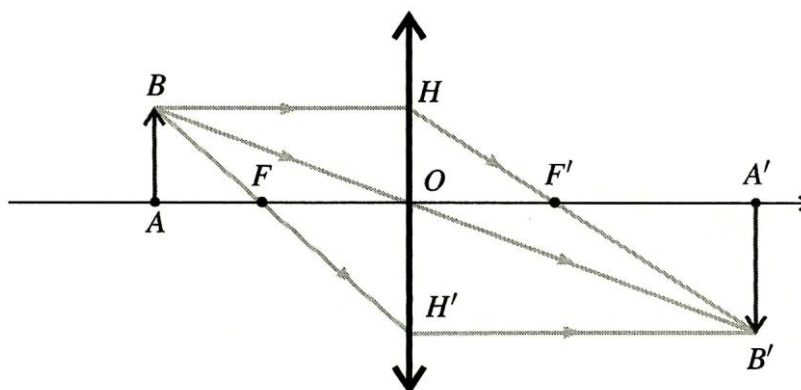
Dans le cas d'un point objet A situé sur l'axe optique, les trois rayons remarquables sont confondus avec l'axe optique. Pour déterminer l'image A' de A on prend un point B dans le plan de front passant par A et on construit son image B' . A' est l'intersection du plan de front passant par B' avec l'axe optique.

Dans ces constructions les parties virtuelles des rayons sont représentées en pointillés.

3.3. Application à une lentille convergente

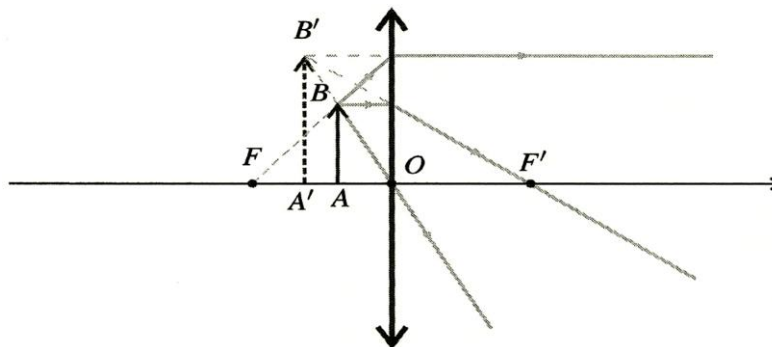
Les figures suivantes montrent les constructions géométriques dans les quatre cas possibles :

1. l'objet est réel et situé avant F



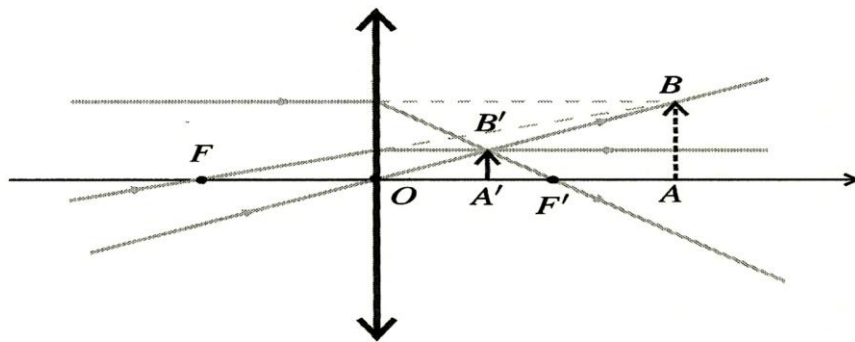
Résultat : un objet réel avant F donne une image réelle, renversée, située après F'

2. l'objet est réel et situé entre F et O ;



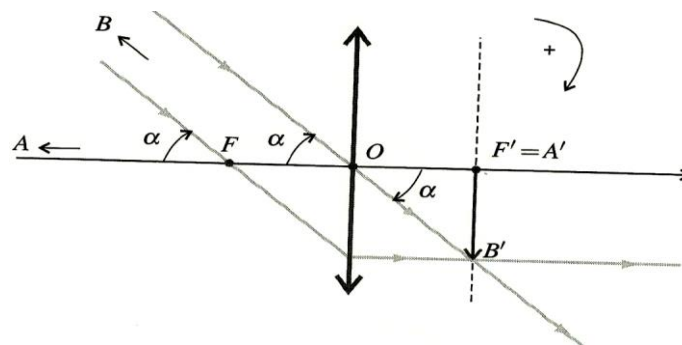
Résultat : un objet réel entre F et O donne une image virtuelle, droite, plus grande, c'est le cas de la loupe.

3. l'objet est virtuel donc situé après O ;



Résultat : un objet virtuel après O donne une image réelle, plus petite, droite.

4. l'objet est situé à l'infini.



Résultat : un objet à l'infini a une image réelle, dans le plan focal image.

Dans le cas où l'objet est à l'infini on ne peut tracer que deux rayons remarquables venant de B . Ils sont parallèles entre eux et inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique. B' appartient au plan focal image ce qui est normal puisque B est à l'infini. Dans le triangle $OF'B'$ on peut écrire :

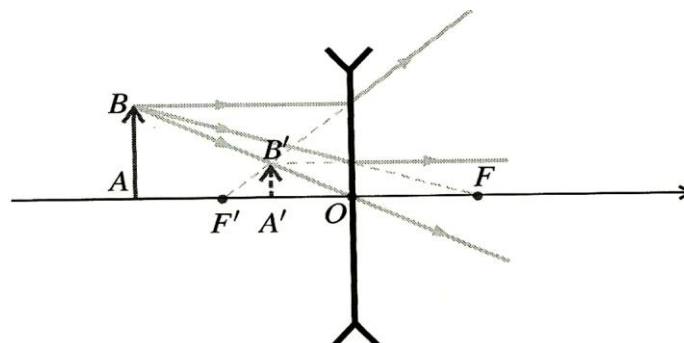
$$\tan \alpha = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF'}} \Rightarrow \overline{A'B'} = -f' \tan \alpha \approx -f' \alpha$$

puisque dans les conditions de Gauss, l'angle α est très petit.

3.4. Application à une lentille divergente

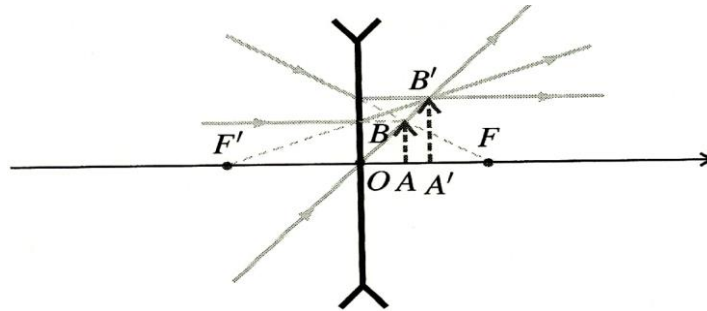
Les figures suivantes montrent les constructions géométriques dans les quatre cas possibles :

1. l'objet est réel donc situé avant O



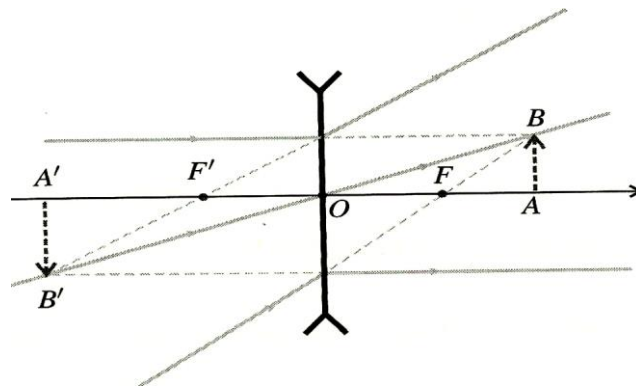
Résultat : un objet réel avant O donne une image virtuelle, droite, plus petite.

2. l'objet est virtuel et situé entre O et F ;



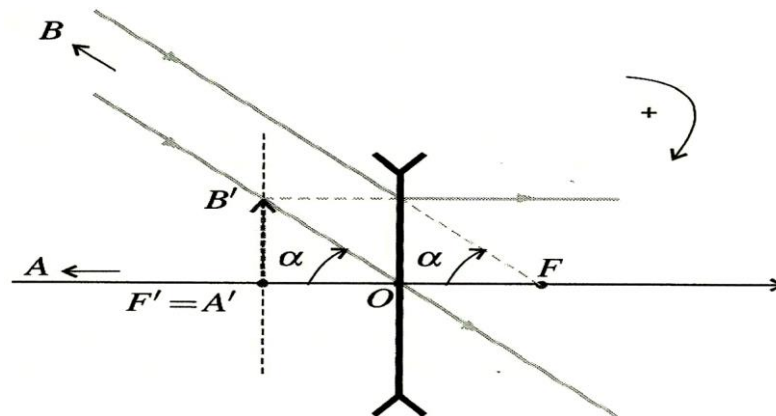
Résultat : un objet virtuel entre O et F donne une image réelle, droite, plus grande.

3. l'objet est virtuel et situé après F ;



Résultat : un objet virtuel après F donne une image virtuelle, renversée.

4. l'objet est situé à l'infini.



Résultat : un objet à l'infini a une image virtuelle située dans le plan focal image.

À la différence d'une lentille convergente, une lentille divergente ne peut pas donner une image réelle d'un objet réel.

Dans le cas où l'objet est à l'infini on ne peut tracer que deux rayons remarquables venant de B . Ils sont parallèles entre eux et inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique. B'

appartient au plan focal image ce qui est normal puisque B est à l'infini. Dans le triangle $OF'B'$ on peut écrire :

$$\tan \alpha = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF'}} \Rightarrow \overline{A'B'} = -f' \tan \alpha \approx -f' \alpha$$

puisque dans les conditions de Gauss, l'angle α est très petit.

4. Relations de conjugaison

4.1. Principe

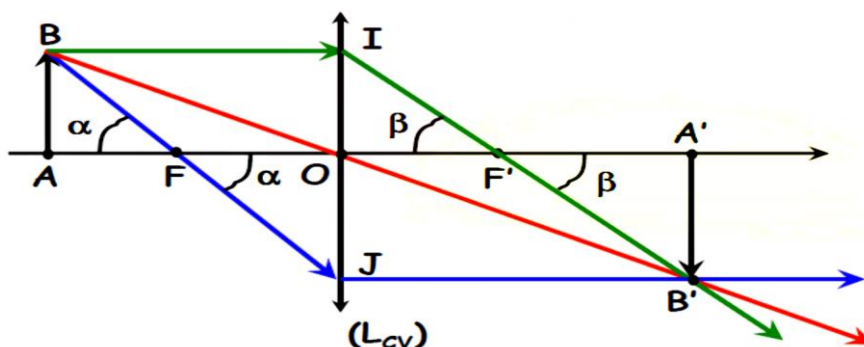
Les images trouvées par les constructions géométriques peuvent se calculer en utilisant les formules de conjugaison. Ces formules vont par deux :

- une formule de position liant les positions de deux points A et A' conjugués appartenant à l'axe optique ;
- une formule de grandissement exprimant le grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ entre les plans de front conjugués passant par A et A' qui permet de positionner l'image B' d'un point B quelconque du plan de front passant par A .

4.2. Relations avec origine aux foyers, dites relations de Newton

Ces relations font apparaître les mesures algébriques \overline{FA} et $\overline{F'A'}$ qui repèrent les positions du point objet A et du point image A' respectivement par rapport au foyer objet F et au foyer image F' .

- Déterminons la formule de position. Pour cela raisonnons sur la figure suivante et on généralise ensuite (lentille convergente ou divergente)



$$\alpha = \frac{\overline{AB}}{-\overline{FA}} = \frac{\overline{JO}}{-\overline{OF}} \quad ; \quad \beta = \frac{-\overline{A'B'}}{-\overline{F'A'}} = \frac{\overline{OI}}{\overline{OF'}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OI} = \overline{AB} \\ \overline{JO} = -\overline{A'B'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{OF}}{-\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}} \Rightarrow \overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{OF} \times \overline{OF'}$$

La formule de position est donc :

$$\boxed{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2 = -f^2 = ff'}$$

C'est la formule de conjugaison avec origine au foyer

- Le grandissement est par définition $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$$

Il vient donc :

$$\boxed{\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}}$$

Remarque : ces formules font intervenir des mesures algébriques. Lorsqu'on les applique il faut contrôler les signes en observant une figure.

4.3. Relations avec origine au centre, dites relations de Descartes

Ces relations font apparaître les mesures algébriques \overline{OA} et $\overline{OA'}$ qui repèrent les positions du point objet A et du point image A' respectivement par rapport au centre optique O de la lentille.

- Déterminons la formule de position :

On part de la relation $\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{OF} \times \overline{OF'} = -f'^2 = -f^2 = ff'$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{FA} = \overline{OA} - \overline{OF} = \overline{OA} + f' \\ \overline{F'A'} = \overline{OA'} - \overline{OF'} = \overline{OA'} - f' \end{array} \right\} \Rightarrow (\overline{OA} + f') \cdot (\overline{OA'} - f') = -f'^2$$

$$\Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OA'} - f' \cdot \overline{OA} + f' \cdot \overline{OA'} = 0 \Rightarrow \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OA'}}{f' \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'}} - \frac{f' \cdot \overline{OA}}{f' \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'}} + \frac{f' \cdot \overline{OA'}}{f' \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OA'}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'} - \frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{\overline{OA}} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = V}$$

C'est la relation de conjugaison des lentilles minces avec origine au centre (formule de Descartes)

On pose souvent $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$ on a donc

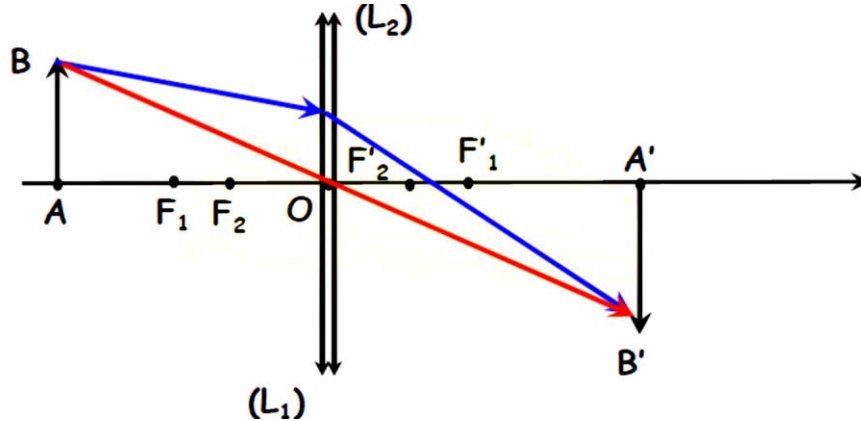
$$\boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}}$$

- La formule de grandissement est :

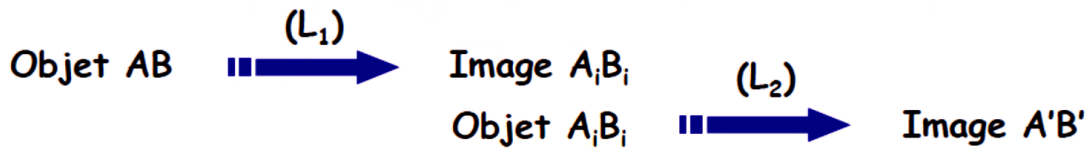
$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{p'}{p}$$

5. Associations de deux lentilles minces (doublet accolé)

Les deux lentilles sont accolés (leurs centres optiques O_1 et O_2 sont confondus en O).



Quelle est la position de l'image $A'B'$ et sa taille ? Pour cela utilisons la méthode de l'image intermédiaire :



Relations de conjugaison :

Pour la lentille (L_1) : $-\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA_i} = \frac{1}{f'_1}$; Pour la lentille (L_2) : $-\frac{1}{OA_i} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'_2}$

Ajoutons membres à membres les deux relations on a :

$$-\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA_i} - \frac{1}{OA_i} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \Rightarrow -\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$$

On définit une distance focale image équivalente f'_{eq} telle que:

$$\frac{1}{f'_{eq}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \Rightarrow V'_{eq} = V'_1 + V'_2$$

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'_{eq}}$$

Formule des opticiens

Un doublet de lentilles accolées est donc équivalent à une lentille mince dont on peut calculer la distance focale équivalente.

Le grandissement vaut :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'B'}{A_i B_i} \cdot \frac{A_i B_i}{AB} = \frac{OA'}{OA_i} \cdot \frac{OA_i}{OA} = \frac{OA'}{OA}$$

6. Applications des lentilles

6.1. Projection d'une image

6.1.1. Position du problème

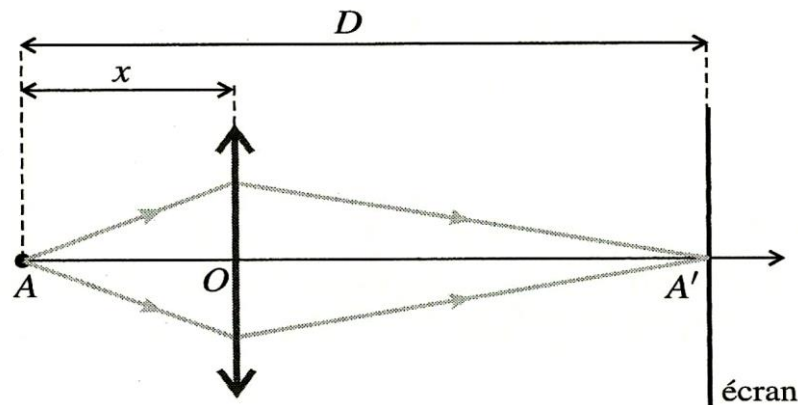
On veut projeter l'image d'un objet rétroéclairé sur un écran (diapositive par exemple). On souhaite avoir une image agrandie le plus possible, aussi lumineuse et nette que possible, avec une distance D entre l'objet et l'écran qui est imposée dans les conditions extérieures. Pour cela on doit utiliser une lentille nécessairement convergente car il faut obtenir une image réelle d'un objet réel. Comment choisir la distance focale de cette lentille ? Comment obtenir une image lumineuse et uniformément éclairée ?

6.1.2. Choix de la lentille

- **Condition pour avoir une image nette**

On voit une image nette si la lentille forme l'image de l'objet exactement sur l'écran.

Pour cela il faut placer la lentille convergente au bon endroit entre l'objet et l'écran. La figure suivante illustre cette situation : A est un point de l'objet conjugué avec le point A' sur l'écran.



Pour projeter un objet sur un écran avec une lentille convergente, il faut que la distance D entre l'objet et l'écran et la distance focale image f' de la lentille vérifient :

$$D > 4f'$$

- **Condition pour avoir un grandissement suffisant**

Pour avoir une image agrandie il faut placer la lentille plus près de l'objet que de l'écran. Pour une distance objet-écran fixée, l'image est d'autant plus grande que la distance focale de la lentille convergente utilisée est petite.

La lentille doit avoir une distance focale suffisamment petite pour avoir un grandissement suffisant mais pas trop petite pour respecter les conditions de Gauss.

6.2. Le microscope

Le microscope est constitué de deux parties optiques :

- l'objectif qui est du côté de l'objet ;
- l'oculaire qui est du côté de l'œil.

L'image finale donnée par un instrument d'optique oculaire doit être à l'infini.

6.2.1. Modélisation d'un microscope

On modélise très simplement un microscope par deux lentilles minces :

- l'objectif est équivalent à une lentille convergente L_1 de distance focale $f'_1 = 5 \text{ mm}$
- l'oculaire est équivalent à une lentille convergente L_2 de distance focale $f'_2 = 2,5 \text{ cm}$

Puisqu'on a deux lentilles il faut préciser leur position relative. On se donne donc la distance entre le foyer image de l'objectif F'_1 et le foyer objet de l'oculaire F_2 soit $\Delta = F'_1 F_2 = 25 \text{ cm}$. Ces valeurs sont indicatives, elles varient d'un microscope à l'autre.

6.2.2. Étude de la mise au point

La mise au point consiste à déplacer l'objet jusqu'à voir son image nette dans l'oculaire sans fatigue. Quelle doit être la distance entre l'objectif et l'oculaire ?

Soit AB l'objet observé. L'objectif donne de AB une image $A_1 B_1$; l'oculaire donne de $A_1 B_1$ une image à l'infini. Ceci est résumé par le schéma suivant :

$$AB \xrightarrow{\text{objectif}} A_1 B_1 \xrightarrow{\text{oculaire}} \infty$$

Ce type de schéma des images successives est très utile lorsqu'on étudie un instrument avec 2 ou plusieurs lentilles.

Puisque l'image finale est à l'infini, $A_1 B_1$ doit se trouver dans le plan focal objet de l'oculaire, donc : $A_1 = F_2$.

On peut en déduire la position de AB en utilisant une formule de conjugaison. Il est judicieux d'utiliser la relation de Newton pour L_1 qui s'écrit :

$$\overline{F'_1 F_2} \times \overline{F_1 A} = -f_1'^2 \Rightarrow \overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -0,1 \text{ mm}$$

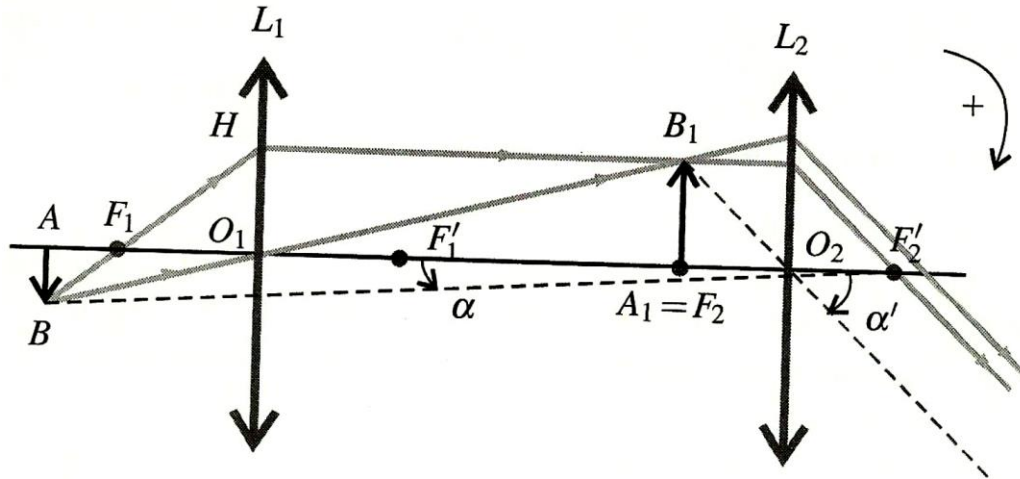
On obtient enfin $\overline{O_1 A}$ par la loi de Chasles :

$$\overline{O_1 A} = \overline{O_1 F_1} + \overline{F_1 A} = -f_1' + \overline{F_1 A} = -5,1 \text{ mm}$$

C'est la distance entre la lentille objectif et l'objet lorsque la mise au point est réussie.

6.2.3. Construction géométrique

Pour effectuer la construction, il faut chercher l'antécédent de F_2 par L_1 , ce qui a été réalisé sur la figure suivante en utilisant les trois rayons remarquables pour L_1 passant par B_1 .



6.2.4. Grossissement

Par définition le grossissement G est le rapport de l'angle α' sous lequel l'objet est vu à travers le microscope sur l'angle α sous lequel il est vu à l'œil nu.

Le microscope est conçu de manière à ce que l'on place son œil au foyer image de l'oculaire. L'angle sous lequel l'objet est vu dans le microscope est l'angle d'inclinaison α' des rayons émergents. Comme on a pris le sens horaire comme sens positif pour les angles, α' est positif. De plus cet angle est petit puisque l'on doit respecter les conditions de Gauss. On peut écrire alors :

$$\alpha' \cong \tan \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{F_2 O_2}} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f_2'}$$

On peut exprimer $\overline{A_1 B_1}$ en fonction de \overline{AB} en utilisant la relation de grandissement de Newton pour la lentille L_1 : $\gamma_1 = \frac{f_1'}{F_1 A}$. On obtient finalement :

$$\alpha' \cong \tan \alpha' = \frac{\overline{AB}}{\overline{F_1 A}} \frac{f_1'}{f_2'}$$

Déterminons maintenant l'angle sous lequel AB est vu sans microscope. L'angle est montré sur la figure précédente (rappel : l'œil est placé en F_2'). α est négatif, très petit d'après les conditions de Gauss, et :

$$\alpha \cong \tan \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF_2'}}$$

Or : $\overline{AF'_2} = \overline{AF_1} + \overline{F_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2F'_2} = \overline{AF_1} + 2f'_1 + \Delta + 2f'_2 = 310,1 \text{ mm}$.

Le grossissement est donc :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1 \overline{AF'_2}}{f'_2 \overline{F_1A}} = -620$$

On trouve un grossissement négatif car l'image sera vue renversée par rapport à l'objet ce qui est dû à l'objectif. On peut s'en rendre compte en déplaçant l'objet car on voit l'image se déplacer en sens inverse.

6.3. La lunette de Galilée

La lunette de Galilée est la lunette la plus simple permettant d'observer des objets terrestres.

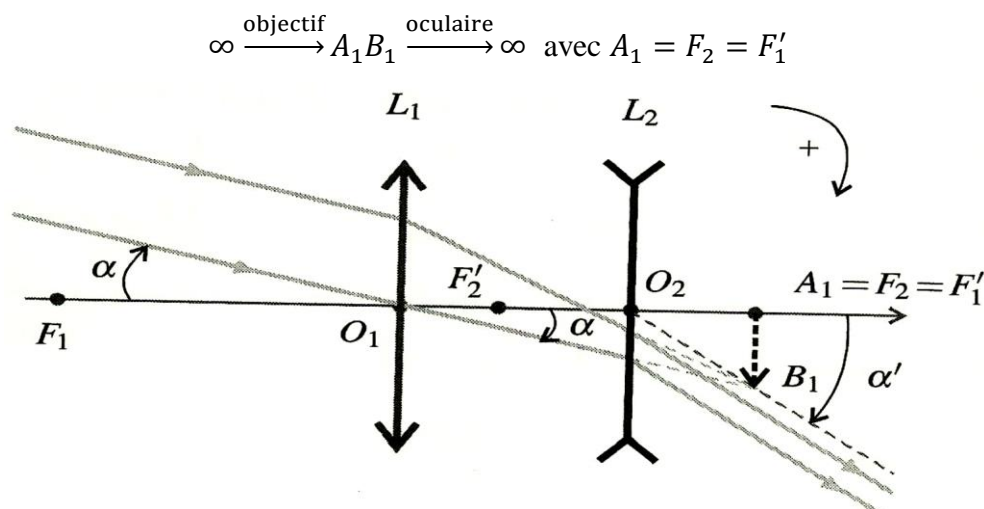
On la modélise comme suit :

- l'objectif est équivalent à une lentille convergente L_1 de distance focale $f'_1 = 60 \text{ cm}$
- l'oculaire est équivalent à une lentille divergente L_2 de distance focale $f'_2 = -5 \text{ cm}$

Ces valeurs sont indicatives, elles varient d'une lunette à l'autre.

La lunette de Galilée est réglée à l'infini c'est-à-dire que les objets observés sont à une distance grande devant la distance focale. Comme pour le microscope, l'image finale doit être à l'infini. L'objet et l'image étant à l'infini, il s'agit d'un système afocal.

Puisque l'objet est à l'infini, l'image intermédiaire est dans le plan focal image de L_1 et comme l'image finale est à l'infini, l'image intermédiaire est dans le plan focal objet de L_2 .



Calculons le grossissement :

$$\alpha' \cong \tan \alpha' = \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{O_2F_2}}$$

$$\alpha \cong \tan \alpha = \frac{\overline{B_1A_1}}{\overline{F'_1O_1}}$$

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\overline{O_1 F'_1}}{O_2 F'_2} = \frac{f'_1}{f'_2} = 12$$

Le grossissement est positif donc objet et image sont dans le même sens.

6.4. La lunette astronomique

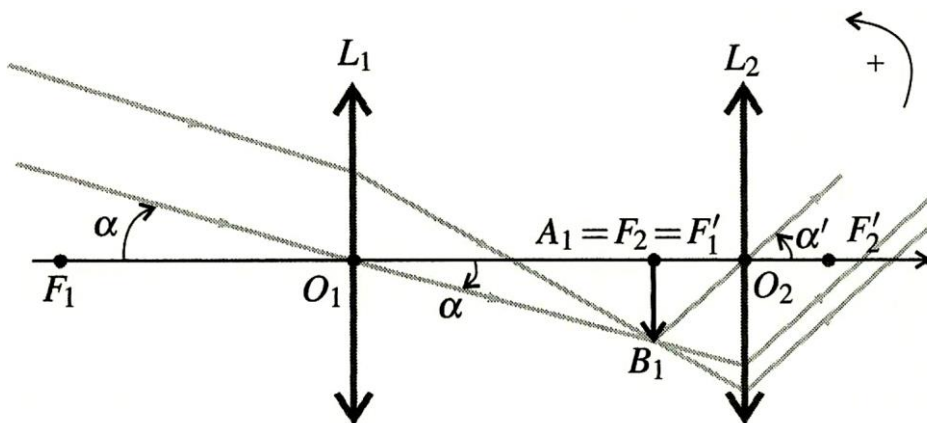
La lunette astronomique est une lunette permettant d'observer des objets à très grandes distances (à l'infini). On la modélise comme suit :

- l'objectif est équivalent à une lentille convergente L_1 de distance focale $f'_1 = 60$ cm
- l'oculaire est équivalent à une lentille convergente L_2 de distance focale $f'_2 = 5$ cm

Ces valeurs sont indicatives, elles varient d'une lunette à l'autre.

La lunette astronomique est aussi réglée à l'infini. Comme pour le microscope, l'image finale doit être à l'infini. L'objet et l'image étant à l'infini, il s'agit d'un système afocal.

$$\infty \xrightarrow{\text{objectif}} A_1 B_1 \xrightarrow{\text{oculaire}} \infty \text{ avec } A_1 = F_2 = F'_1$$



Calculons le grossissement :

$$\alpha' \cong \tan \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{F_2 O_2}$$

$$\alpha \cong \tan \alpha = \frac{\overline{A_1 B_1}}{O_1 F'_1}$$

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\overline{O_1 F'_1}}{F_2 O_2} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -12$$

Le grossissement est négatif, donc l'image est à l'envers.